BAB

1

KINEMATIKA GERAK

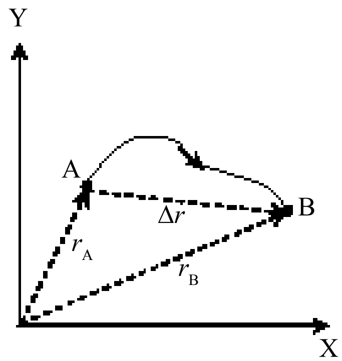
Sumber: www.jatim.go.id

Jika kalian belajar fisika maka kalian akan sering mempelajari tentang gerak. Fenomena tentang gerak memang sangat menarik. Coba perhatikan tentang gerak pada gambar di atas. Dari gambar itu saja dapat timbul banyak pertanyaan yang perlu dijawab. Bagaimana kecepatan awal anak tersebut, bagaimana posisi tiap saatnya, bagaimana agar jangkauannya jauh. Ada juga pertanyaan apakah jenis-jenis gerak yang dapat kita amati? Semua hal itu dapat kalian jawab dengan mempelajari bab ini. Oleh sebab itu setelah belajar bab ini kalian diharapkan dapat:

1. menentukan perpindahan, kecepatan dan percepatan sebuah benda yang bergerak secara vektor,
2. menentukan kecepatan sudut, percepatan sudut dan percepatan linier pada benda yang bergerak melingkar,
3. menentukan kecepatan sudut, percepatan sudut dan percepatan linier pada benda yang bergerak parabola.

A. Gerak Translasi

1. Perpindahan dan Jarak



Gambar 1.1

Kalian sering mendengar atau mengucapkan kata bergerak. Apa sebenarnya arti bergerak dalam ilmu fisika? Apakah kalian sudah mengerti? Benda dikatakan bergerak jika mengetahui perubahan posisi atau kedudukan. Coba kalian lihat *Gambar 1.1*. Posisi atau kedudukan titik A dan titik B dapat dituliskan sebagai vektor dua dirumuskan sebagai berikut.

$$r = xi + yj \quad \text{.................................} \quad (1.1)$$

Partikel dari titik A pindah ke titik B maka partikel tersebut dikatakan telah bergerak dan perpindahannya memenuhi persamaan berikut.

$$\Delta r = r_B - r_A$$
atau
$$\Delta r = \Delta xi + \Delta yj \quad \text{.................................} \quad (1.2)$$

Jarak tempuh

Perpindahan partikel pada *Gambar 1.1* digambarkan sebagai vektor dari A ke B yaitu *vektor* Δ*r*. Bagaimana dengan jarak tempuhnya? *Jarak tempuh* partikel adalah panjang lintasan yang dilakukan partikel selama bergerak.

2. Kecepatan dan Laju

Setiap benda yang bergerak selalu mengalami perpindahan. Perpindahan yang terjadi tiap satu satuan waktunya diukur dengan besaran yang dinamakan kecepatan. Di kelas X kalian telah belajar tentang kecepatan. Apakah masih ingat? Coba kalian perhatikan penjelasan berikut.

Penting

Besaran vektor	Besaran skalar
• posisi	• jarak
• perpindahan	• jarak tempuh
• kecepatan	• laju
• percepatan	• pelajuan

a. Kecepatan dan kelajuan rata-rata

Jika kita naik mobil atau sepeda motor, kecepatannya tidaklah tetap. Kadang bisa cepat dan kadang lambat, bahkan saat lampu merah harus berhenti. Pada gerak dari awal hingga akhir dapat diperoleh suatu kecepatan yang dinamakan kecepatan rata-rata dan didefinisikan sebagai perpindahan tiap satu satuan waktu. Perumusannya sebagai berikut.

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad \text{.................................} \quad (1.3)$$

Laju rata-rata. Bagaimana dengan laju rata-rata? Kecepatan adalah besaran vektor maka berkaitan dengan perpindahan. Tetapi laju merupakan besaran skalar maka harus berkaitan dengan jarak tempuh. Sehingga laju rata-rata didefinisikan sebagai jarak tempuh yang terjadi tiap satu satuan waktu

$$\bar{v} = \frac{S}{t} \qquad \text{................................} \qquad (1.4)$$

b. Kecepatan dan kelajuan sesaat

Kalian tentu masih ingat di kelas X tentang kecepatan sesaat. Kecepatan sesaat merupakan kecepatan yang terjadi pada saat itu saja. Contohnya pada saat lampu merah kecepatan mobil sebesar nol, kemudian saat lampu hijau mobil tersebut diberikan kecepatan 20 km/jam ke utara.

Secara matematik kecepatan sesaat ini dapat dirumuskan sebagai *deferensial* atau turunan fungsi yaitu fungsi posisi. Jadi kecepatan sesaat adalah deferensial dari posisinya.

$$\bar{v} = \frac{dr}{dt} \qquad \text{................................} \qquad (1.5)$$

Sedangkan laju sesaat dapat ditentukan sama dengan besar kecepatan sesaat. Laju sesaat inilah yang dapat diukur dengan alat yang dinamakan *speedometer*.

Sudah tahukah kalian dengan deferensial fungsi itu? Tentu saja sudah. Besaran posisi atau kecepatan biasanya memenuhi fungsi waktu. Deferensial fungsi waktu tersebut dapat memenuhi persamaan berikut.

Jika $r = t^n$

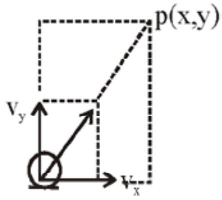
maka $v = \frac{dr}{dt} = nt^{n-1}$ .... (1.6)

Pada gerak dua dimensi, persamaan 1.5 dan 1.6 dapat dijelaskan dengan contoh gerak perahu seperti pada *Gambar 1.2*. Secara vektor, kecepatan perahu dapat diuraikan dalam dua arah menjadi v_x dan v_y. Posisi tiap saat memenuhi P(x,y). Berarti posisi perahu atau benda dapat memenuhi persamaan 1.1. dari persamaan itu dapat diturunkan persamaan kecepatan arah sumbu x dan sumbu y sebagai berikut.

$$r = xi + yj$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j$$

$$v = v_x i + v_y j \qquad \text{................................} \qquad (1.7)$$



Gambar 1.2
Gerak perahu dapat diuraikan dalam dua sumbu (dua arah)

Penting

Deferensial suatu fungsi memenuhi persamaan berikut

$$y = t^n$$

$$\frac{dy}{dt} = n\, t^{n-1}$$

Jadi proyeksi kecepatannya memenuhi :

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{dan} \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

Besar kecepatan sesaat, secara vektor dapat memenuhi dalil Pythagoras. Kalian tentu dapat merumuskan persamaan besar kecepatan tersebut. Perhatikan persamaan 1.7. Dari persamaan itu dapat kalian peroleh :

$$|v| = \sqrt{v_x^{2} . + v_y^{2}} \qquad \text{.........................} \quad (1.8)$$

Untuk memenuhi penjelasan di atas dapat kalian cermati contoh berikut.

CONTOH 1.1

Partikel bergerak dengan posisi yang berubah tiap detik sesuai persamaan : $r = (4t^2 - 4t + 1)\, i + (3t^2 + 4t - 8)\, j$. dengan r dalam m dan t dalam s. i dan j masing-masing adalah vektor satuan arah sumbu X dan arah sumbu Y. Tentukan:

a. posisi dan jarak titik dari titik acuan pada t = 2s,
b. kecepatan rata-rata dari t = 2s s.d t = 3s,
c. kecepatan dan laju saat t = 2s!

Penyelesaian

$r = (4t^2 - 4t + 1)\, i + (3t^2 + 4t - 8)\, j$

a. Untuk t = 2s

$r_2 = (4.2^2 - 4.2 + 1)\, i + (3.2^2 + 4.2 - 8)\, j$

$r_2 = 9\, i + 12\, j$

jarak : $|r_2| = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$ m

b. Kecepatan rata-rata

$r_2 = 9\, i + 12\, j$

$r_3 = (4.3^2 - 4.3 + 1)\, i + (3.3^2 + 4.3 - 8)\, j$

$ = 25\, i + 31\, j$

Kecepatan rata-ratanya memenuhi:

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

$$= \frac{(25i + 31j) - (9i + 12j)}{3 - 2} = 16\, i + 19\, j$$

besarnya:

$$|\vec{v}| = \sqrt{16^2 + 19^2} = \sqrt{617} = 24{,}8 \text{ m/s}$$

c. Kecepatan sesaat

$$v = \frac{dr}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{(4t^2 - 4t + 1)i + (3t^2 + 4t - 8)j\right\}$$

$$= (8t - 4)i + (6t + 4)j$$

untuk t = 2s:

$$v_2 = (8.2 - 4)i + (6.2 + 4)j$$

$$= 12\, i + 16\, j$$

laju sesaatnya sama dengan besar kecepatan sesaat

$$|v_2| = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20 \text{ m/s}$$

Setelah memahami contoh di atas dapat kalian coba soal berikut.

Gerak suatu benda dinyatakan dengan persamaan $r = (2t^2 - 4t + 8)i + (1{,}5t^2 - 3t - 6)j$. Semua besaran menggunakan satuan SI.

Tentukan:

a. posisi dan jarak benda dari titik pusat koordinat pada t = 1s dan t = 2s,
b. kecepatan rata-rata dari t = 1s s.d t = 2s,
c. kecepatan dan laju saat t = 2s.

Penting

Secara vektor kecepatan sesaat dapat dituliskan:

$$v = v_x\, i + v_y\, j$$

Besarnya kecepatan sesaat sama dengan laju sesaat memenuhi dalil Pythagoras:

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

c. Posisi dan kecepatan

Jika kecepatan sesaat dapat ditentukan dengan deferensial posisi maka secara matematis posisi dapat ditentukan dari integral kecepatan sesaatnya. Integral ini dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$r = r_0 + \int v\, dt \quad \text{.................................} \quad (1.9)$$

Definisi integral secara mendetail dapat kalian pelajari di mata pelajaran Matematika. Untuk mata pelajaran Fisika kelas XI ini dikenalkan untuk fungsi t^n. Perhatikan persamaan berikut.

$$\int t^n\, dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{............................}$$

Perhatikan contoh berikut.

CONTOH 1.2

Tentukan hasil integral-integral berikut.

a) $\int (2t+5)dt = 2\frac{t^{1+1}}{(1+1)} + 5\frac{t^{0+1}}{(0+1)} + C$

$= 2\frac{t^2}{2} + 5\frac{t^1}{1} + C$

$= t^2 + 5t + C$

b) $\int (6t^2 + 4t - 6)\,dt = \frac{6t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} - 6t$

$= 2t^3 + 2t - 6t + C$

c) $\int (2t - 3t^2)\,dt = \frac{2t^2}{2} - \frac{3}{3}t^2 + C$

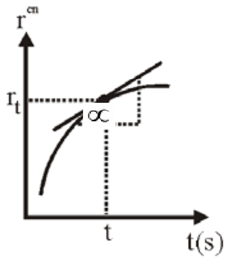
$= t^2 - t^3 + C$

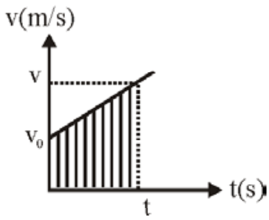
Setelah memahami contoh di atas dapat kalian coba soal berikut.

Tentukan hasil integral berikut.

a. $\int 2dt$ b. $\int (4t-2)dt$ c. $\int (2t^2 - 6\ t\ 2)dt$

Hubungan kecepatan dan posisi ini dapat dijelaskan melalui grafik. Perhatikan penjelasan berikut.





Gambar 1.3
(a) fungsi r - t, dan
(b) fungsi v - t

Seperti yang telah kalian pelajari bahwa kecepatan merupakan deferensial dari fungsi posisi. Dengan grafik, kecepatan sesaat dapat menyatakan gradien garis singgung fungsi posisi. Perhatikan *Gambar 1.3 (a)*. Kecepatan pada saat t dapat dirumuskan :

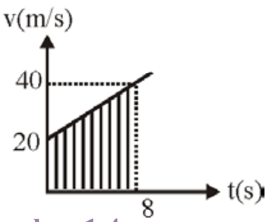
$$v = \operatorname{tg} \alpha \qquad \text{..................} \quad (1.11)$$

Sedangkan posisi suatu benda pada t s merupakan integral dari fungsi kecepatannya. Bagaimana jika diketahui dalam bentuk grafik seperti pada *Gambar 1.3 (b)*? Tentu kalian dapat menjawabnya bahwa posisi suatu benda dapat dibentuk dari luas grafik (terarsir), sehingga diperoleh persamaan:

$$r = r_o + \text{luas daerah terarsir} \qquad \text{.................} \quad (1.12)$$

CONTOH 1.3

Kecepatan suatu benda berubah tiap saat memenuhi grafik v - t seperti pada *Gambar 1.4*. Jika mula-mula benda berada pada posisi 30 m arah sumbu x dan gerak benda pada arah sumbu x positif, maka tentukan posisi benda pada t = 8 s!



Gambar 1.4

Penyelesaian

Gerak benda pada arah sumbu x, berarti

r (t) = x (t)

x_0 = 30 m

Pada t = 8 s posisinya memenuhi :

x = x_0 + luas (daerah terarsir)

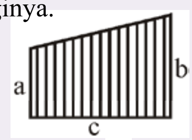
$$= 30 + (20 + 40) \cdot \frac{8}{2}$$
$$= 270 \text{ m}$$

Setelah memahami contoh di atas dapat kalian coba soal berikut.

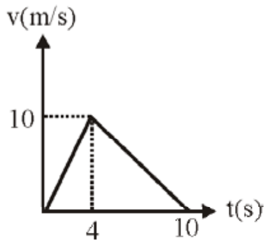
Mula-mula sebuah partikel pada posisi x = -120 m.
Kemudian partikel bergerak dengan kecepatan bentuk seperti pada *Gambar 1.5*. Tentukan posisi partikel

Penting

Luas trapesium sama dengan jumlah sisi sejajar kali $\frac{1}{2}$ tingginya.



Luas = (a + b) $\frac{c}{2}$



Gambar 1.5

3. Percepatan

a. Nilai rata-rata dan sesaat

Sesuai dengan kecepatan, percepatan juga memiliki dua nilai. Percepatan rata-rata didefinisikan sebagai perubahan kecepatan tiap satu satuan waktu.

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{..........................} \quad (1.13)$$

Sedangkan percepatan sesaat dapat ditentukan dengan deferensial dari kecepatan sesaatnya.

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} \quad \text{..........................} \quad (1.14)$$

CONTOH 1.4

Sebuah gerak partikel dapat dinyatakan dengan persamaan $r = (t^3 - 2t^2)\, i + (3t^2)\, j$. Semua besaran memiliki satuan dalam SI. Tentukan besar percepatan gerak partikel tepat setelah 2s dari awal pengamatan!

Penyelesaian

$r = (t^3 - 2t^2)\, i + (3t^2)\, j$

Kecepatan sesaat diperoleh:

$$\bar{v} = \frac{dr}{dt}$$
$$= \frac{d}{dt}\left\{(t^3 - 2t^2)i + (3t^2)j\right\} = (3t^2 - 4t)\, i + (6t)\, j$$

Percepatan sesaatnya :

$$a = \frac{dv}{dt} = (6t - 4)i + 6j$$

Untuk t = 2s:

$a^2 = (6.2 - 4)\ i + 6j = 8i + 6j$

Jadi besar percepatannya memenuhi:

$$|a_2| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\ \text{m/s}^2$$

Setelah memahami contoh di atas dapat kalian coba soal berikut.

Posisi setiap saat dari sebuah benda yang bergerak dinyatakan dengan persamaan : $r = (2 + 8t - 4t^2)i + (3t^2 - 6t - 10)j$. r dalam m dan t dalam s. Berapakah besar percepatan benda saat t = 2s?

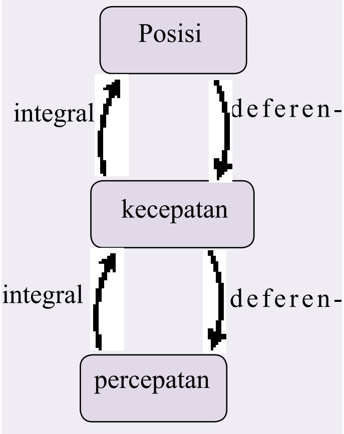
b. Kecepatan dan percepatan

Jika percepatan sesaat dapat ditentukan dengan deferensial dari kecepatan sesaat maka sebaliknya berlaku integral berikut.

$$v = v_0 + \int a\,dt \qquad \text{.............................} \qquad (1.15)$$

Untuk memahami persamaan-persamaan di atas dapat kalian cermati contoh berikut.

Penting



CONTOH 1.5

Sebuah partikel bergerak lurus dengan percepatan $a = (2 - 3t^2)$. a dalam m/s^2 dan t dalam Pada saat t = 1s, kecepatannya 3 m/s dan posisinya $\frac{3}{4}$ m dari titik acuan. Tentukan:

a. kecepatan pada t = 2s,

b. posisi pada t = 2s.

Penyelesaian

$a = (2 - 3t^2)$

t = 1s, $v_1 = 3$ m/s dan $S_1 = \frac{3}{4}$ m

t = 2s, v_2 = ? dan S_2 = ?

a. Kecepatan partikel merupakan integral dari percepatan partikel.

$$v = v_0 + \int a\,dt$$
$$= v_0 + \int (2 - 3t^2)\,dt = v_0 + 2t - t^3$$

Untuk t = 1s:

$3 = v_0 + 2.1 - 1^3$

$v_0 = 2$ m/s

jadi : $v = 2 + 2t - t^3$

dan untuk t = 2s diperoleh:

$v(2) = 2 + 2 \cdot 2 - 2^3 = -2$ m/s

b. Posisi merupakan integral dari kecepatan sehingga diperoleh:

$$S = S_0 + \int v\,dt$$

$$= S_0 + \int (2 + 2t - t^3)\,dt = S_0 + 2t + t^2 - \frac{1}{4}t^4$$

Untuk t = 1s:

$$\frac{3}{4} = S_0 + 2.1 + 1^2 - \frac{1}{4}.1^4 \text{ berarti } S_0 = -1 \text{ m}$$

Jadi : $S = -1 + 2t + t^2 - \frac{1}{4} t^4$

dan untuk t = 2s diperoleh:

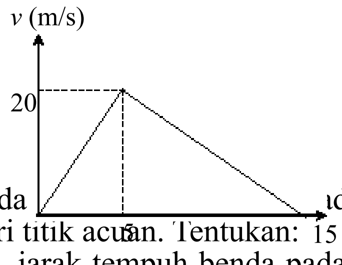
$$S(2) = -1 + 2.2 + 2^2 - \frac{1}{4} . 2^4 = 5 \text{ m}$$

Setelah memahami contoh di atas dapat kalian coba soal berikut.

Benda yang bergerak pada garis lurus memiliki percepatan yang berubah terhadap waktu sesuai persamaan : $a = (4 - 6t)$ m/s^2 dan t dalam s. Pada saat t = 1s terukur posisi dan kecepatan benda masing-masing 4 m dan 1 m/s. Tentukan posisi dan kecepatan benda pada t = 2 s.

LATIHAN 1.1

1. Sebuah benda bergerak dengan posisi yang berubah tiap detik sesuai persamaan: $r = (2 + 4t + 4t^2)i + (1 + 3t + 3t^2)j$. Tentukan:
   a. posisi awal dan posisi pada t = 1 s,
   b. besar perpindahan pada 1s pertama,
   c. kecepatan rata-rata dari t = 0 s s.d 1 s,
   d. kecepatan pada saat t = 2 s,
   e. percepatan pada t = 3 s !
2. Kecepatan benda berubah sesuai persamaan $v = (10t + 2)i + (24t - 5)j$. v dalam m dan t dalam s. Berapakah:
   a. percepatan benda pada t = 2 s,
   b. posisi benda pada t = 2 s jika posisi awalnya di titik pusat koordinat?
3. Sebuah partikel bergerak dengan kecepatan $v = (4 - 6t^2)$ m/s. dan t dalam s. Pada saat t = 2 s partikel benda 4 m dari titik acuan. Berapakah jarak partikel dari titik acuan pada t = 5 s ?
4. Kecepatan benda yang bergerak pada garis lurus berubah seperti pada grafik di bawah.

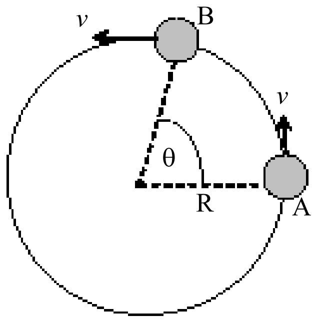


Pada ... da 10 m dari titik acuan. Tentukan:
   a. jarak tempuh benda pada t = 15 m,
   b. posisi benda dari titik acuan t = 15 m,
   c. percepatan benda pada t = 2 s dan t = 10 s !
5. Bola voli dilemparkan vertikal ke atas sehingga memenuhi persamaan $y = 20+10t - 5t^2$. Tentukan ketinggian maksimum yang dicapai bola tersebut!

B. Gerak Melingkar

1. Besaran-besaran pada Gerak Melingkar

Di kelas X kalian telah belajar tentang gerak melingkar, masih ingat belum? Coba kalian lihat pada *Gambar 1.6*, sebuah benda bergerak dari titik A ke titik B dengan lintasan melingkar. Pada gerak itu memiliki besaran yang berupa posisi sudut θ. Besaran-besaran yang lain dapat kalian lihat pada penjelasan berikut.



Gambar 1.6
Benda bergerak melingkar.

a. Kecepatan sudut

Jika benda bergerak pada lintasan melingkar berarti posisi sudutnya juga berubah. Perubahan posisi tiap detik inilah yang dinamakan *kecepatan sudut rata-rata*.

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \text{..................} \quad (1.16)$$

Sesuai dengan definisi kecepatan sesaat maka *kecepatan sudut sesaat* juga dapat didefinisikan sebagai deferensial dari posisi sudut. Sebaliknya posisi sudut dapat ditentukan dari integral kecepatan sudut.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{dan} \quad \theta = \theta_0 + \int \omega \, dt \qquad \text{..................} \quad (1.17)$$

b. Percepatan sudut sesaat

Bagaimana jika kecepatan sudut suatu benda yang bergerak mengalami perubahan? Tentu kalian sudah bisa menjawabnya, bahwa benda tersebut memiliki percepatan sudut. *Percepatan sudut sesaat* didefinisikan sebagai deferensial dari kecepatan sudut sesaat. Sebaliknya akan berlaku bahwa kecepatan sudut sesaat merupakan integral dari percepatan sudutnya.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\text{dan} \quad \omega = \omega_0 + \int \alpha \, dt \qquad \text{..................} \quad (1.18)$$

Kecepatan sudut biasa disebut juga kecepatan anguler sehingga percepatan sudut sama dengan percepatan anguler.

CONTOH 1.6

Benda yang bergerak melingkar kecepatan sudutnya berubah sesuai persamaan $\omega = (3t^2 - 4t + 2)$ rad/s dan t dalam s. Pada saat t = 1s, posisi sudutnya adalah 5 rad. Setelah bergerak selama t = 2s pertama maka

tentukan:
a. percepatan sudut,
b. posisi sudutnya!

Penyelesaian

$\omega = (3t^2 - 4t + 2)$

$t = 1s \rightarrow \theta_1 = 5$ rad

$t = 2s \rightarrow \theta_2 = ?$ dan $\alpha_2 = ?$

a. Percepatan sudut sesaatnya adalah deferensial dari ω.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d}{dt}\left\{(3t^2 - 4t + 2)\right\} = 6t - 4$$

untuk t = 2s:

$d(2) = 6.2 - 4 = 8$ rad/s^2

b. Posisi sudut sama dengan integral dari ω.

$$\theta = \theta_0 + \int \omega\, dt$$

$$\theta = \theta_0 + \int (3t^2 - 4t + 2)\, dt = \theta_0 + t^3 - 2t^2 + 2t$$

untuk t = 1s

$5 = \theta_0 + 1^3 - 2.1^2 + 2.1$ berarti $\theta_0 = 4$ rad

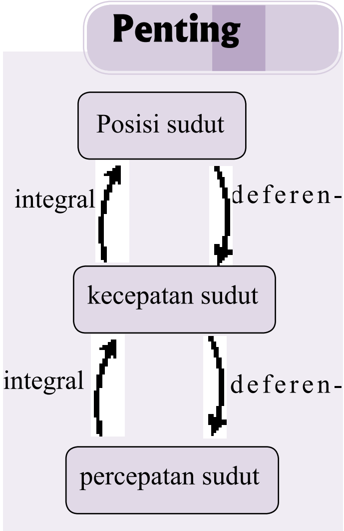
Berarti untuk t = 2s dapat diperoleh:

$\theta = 4 + t^3 - 2t^2 + 2t$

$= 4 + 2^3 - 2.2^2 + 2.2 = 8$ rad

Setelah memahami contoh di atas dapat kalian coba soal berikut.

Sebuah partikel bergerak pada lintasan melingkar dengan posisi sudut yang berubah sesuai persamaan : $\theta = (8 - 2t + 6t^2)$ rad. t dalam s. Tentukan:
a. kecepatan sudut saat t = 3 s,
b. percepatan sudut saat t = 2 s !



2. Besaran Sudut dan Linier

a. Hubungan besaran

Setelah kalian belajar besaran-besaran pada gerak melingkar maka dapat diketahui adanya berbagai jenis besaran yang memiliki kemiripan seperti kecepatan dengan kecepatan sudut. Tahukah kalian apakah besaran-besaran itu ada hubungannya? Jika ada bagaimana hubungannya? Coba kalian perhatikan lagi *Gambar 1.6*. Panjang busur AB berada di depan sudut θ dan dengan jari-jari R. Secara matematis hubungan seperti berikut.

$$S = \theta \cdot R \qquad \text{..........................(1.19)}$$

Sesuai dengan persamaan 1.19 inilah kemudian dapat diturunkan hubungan-hubungan yang lain yaitu untuk kecepatan dan percepatan. Hubungan itu sesuai dengan persamaan berikut.

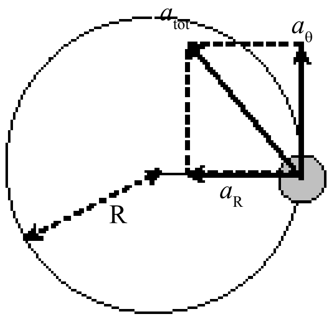
$$v = \omega R$$
$$a_\theta = \alpha R \qquad \text{........................(1.20)}$$

dengan : v = kecepatan linier
ω = kecepatan sudut
a_θ = percepatan tangensial
α = percepatan sudut
R = jari-jari lintasan

b. Percepatan linier

Masih ingat di kelas X, bahwa setiap benda yang bergerak melingkar selalu memiliki percepatan yang arahnya ke pusat lintasan. Tentu kalian masih ingat bahwa percepatan tersebut adalah percepatan sentripetal atau disebut juga percepatan radial. Besarnya seperti persamaan berikut.

$$a_R = \frac{v^2}{R} \quad \text{atau} \quad a_R = \omega^2 R \qquad \text{.....................(1.21)}$$



Gambar 1.7
Percepatan a_θ tegak lurus a_R

Dari penjelasan di atas, berarti benda yang bergerak melingkar dapat memiliki dua percepatan yang saling tegak lurus (jika $a_\theta \neq 0$). Lihat *Gambar 1.7*, a_θ tegak lurus a_R sehingga percepatan linier totalnya memenuhi dalil Pythagoras.

$$a_{tot} = \sqrt{a_R^{\ 2} + a_\theta^{\ 2}} \qquad \text{........................ (1.22)}$$

CONTOH 1.7

Sebuah batu diikat dengan tali sepanjang 20 cm kemudian diputar sehingga bergerak melingkar dengan kecepatan sudut $\omega = 4t^2 - 2$ rad/s. Setelah bergerak 2s, tentukan:

a. kecepatan linier batu,
b. percepatan tangensial,
c. percepatan linier total.

Penyelesaian

R = 2 cm = 0,2 m
$\omega = 4t^2 - 2$
t = 2s

a. Kecepatan sudut pada t = 2 s memenuhi:

$\omega = 4.2^2 - 2 = 14$ rad/s

Berarti kecepatan liniernya sebesar:

$v = \omega R = 14 \cdot 0{,}2 = 2{,}8$ m/s

b. Percepatan sudut batu memenuhi:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(4t^2 - 2) = 8\,t$$

Untuk t = 2 s:

$\alpha = 8.2 = 16$ rad/s^2

Percepatan tangensialnya sebesar:

$a_\theta = \alpha R = 16 \cdot 0{,}2 = 3{,}2$ m/s^2

c. Percepatan radialnya memenuhi:

$a_R = \omega^2 R$

$= 142 \cdot 0{,}2 = 39{,}2$ m/s^2

Berarti percepatan linier totalnya sebesar:

$$a_{tot} = \sqrt{a_R^{\,2} + a_\theta^{\,2}}$$

$$= \sqrt{(39{,}2)^2 + (3{,}2)^2} = \sqrt{1546{,}88}$$

$= 39{,}3$ m/s^2

Setelah memahami contoh di atas dapat kalian coba soal berikut.

Posisi sudut sebuah benda yang bergerak pada lintasan dengan jari-jari 0,5 m berubah menurut persamaan : $\theta = (10t^2 - 6t + 2)$ rad. Setelah bergerak 2s, tentukan :(a) panjang lintasan yang ditempuh, (b) kecepatan liniernya, (c) percepatan tangensialnya dan (d) percepatan linier totalnya!

aduan gerak

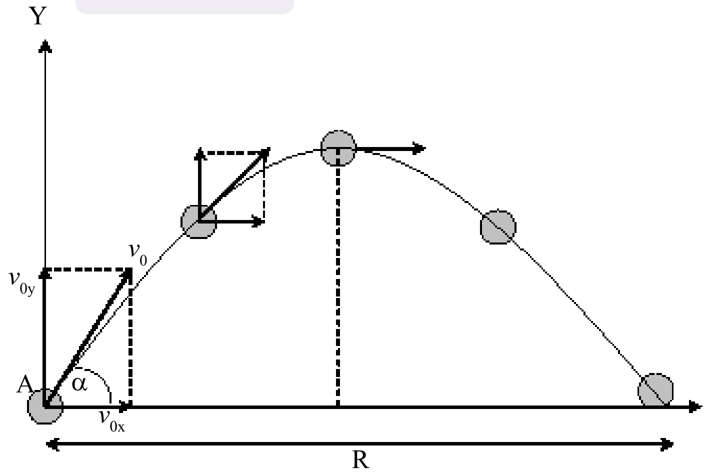
ATIHAN 1.2

1. Benda yang bergerak melingkar posisi sudutnya berubah sesuai persamaan $\theta = 2t^2 + 5t - 8$ rad dan t dalam s. Tentukan:
   a. kecepatan sudut rata-rata dari t = 1s s.d 2s,
   b. kecepatan sudut pada t = 2s,
   c. percepatan sudut pada t = 2s.
2. Kecepatan sudut benda memenuhi $\omega = 6t^2 - 4$ rad/s. Pada saat t = 2s posisi sudut benda sebesar 30 rad. Tentukan posisi sudut benda pada t = 3s.
3. Partikel bergerak rotasi dengan kecepatan awal 20 rad/s dan mengalami percepatan $a_\theta = 4t$ rad/s^2. Jari-jari lintasannya tetap 40 cm. Tentukan besar sudut yang ditempuh pada saat t = 3s dan jarak tempuh gerak partikel!
4. Dari keadaan diam, benda tegar melakukan gerak rotasi dengan percepatan sudut 15 rad/s^2. Titik A berada pada benda tersebut, berjarak 10 cm dari sumbu putar. Tepat setelah benda berotasi selama 0,4 sekon, berapakah percepatan total titik A?

C. Gerak Parabola

Bagaimana lintasan bola yang dilempar miring dengan sudut tertentu? Gerak yang terjadi dinamakan gerak parabola atau gerak peluru. Coba perhatikan *Gambar 1.8*. Jika bola dilemparkan dengan kecepatan v_0 dan sudut elevasi α maka kecepatannya dapat diproyeksikan ke arah mendatar (sumbu X) dan arah vertikal (sumbu Y). Persamaannya seperti di bawah.

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha$$
$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha \qquad \text{.................................(1.23)}$$



Gambar 1.8
Gerak parabola dari sebuah benda yang diberi kecepatan awal membentuk sudut tertentu

Pada arah sumbu X (horisontal) v_{0x} tidak dipengaruhi oleh percepatan sehingga terjadi gerak lurus beraturan (GLB). Sehingga berlaku hubungan berikut.

$$v_x = v_{0x}$$
$$\text{dan } x = v_x\, t \qquad \text{.................................(1.24)}$$

Pada arah sumbu Y (vertikal), v_{0y} akan dipengaruhi percepatan gravitasi yang arahnya ke bawah dan besarnya g = 10 m/s^2. Sehingga pada arah ini terjadi gerak lurus berubah beraturan (GLBB) diperlambat. Perumusannya berlaku persamaan berikut.

$$v_y = v_{0y} - gt$$
$$\text{dan } y = v_{0y}\, t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad \text{................................(1.25)}$$

Dari penjelasan di atas kalian tentu sudah bisa menyimpulkan bahwa gerak parabola terjadi karena *perpaduan gerak* GLB dan GLBB yang saling tegak lurus.

CONTOH 1.8

Bola dilemparkan dengan kecepatan awal 25 m/s dari tanah dan sudut elevasinya 37^0 (sin 37^0 = 0,6). Percepatan gravitasi $g = 10$ m/s^2. Tentukan:

a. kecepatan bola pada 1 sekon pertama,

b. posisi bola pada 2 sekon pertama!

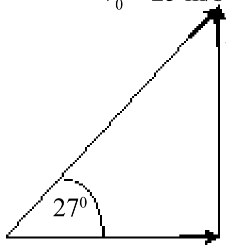
Penyelesaian

v_0 = 25 m/s

α = 37^0

g = 10 m/s^2

Perhatikan proyeksi kecepatan awal pada *Gambar1.9*.



Gambar 1.9
Proyeksi kecepatan awal v_0.

a. Kecepatan pada t = 1s memenuhi:

$v_x = v_{0x} = 20$ m/s

$v_y = v_{0y} - g\,t$

$= 15 - 10.1 = 5$ m/s

Dari nilai kecepatan v_x dan v_y dapat diperoleh kecepatan bola pada t = 1 s dengan menggunakan dalil Pythagoras sehingga diperoleh:

$v = \sqrt{v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2}}$

$= \sqrt{20^2 + 5^2} = \sqrt{425} = 296$ m/s

b. Posisi bola pada t = 2 s memenuhi:

$x = v_x\,t$

$= 20.2 = 40$ m

$y = v_{0y}\,t - \frac{1}{2}\,gt^2$

$= 15.2 - \frac{1}{2}.10.2^2 = 10$ m

Posisi bola dapat ditentukan seperti di bawah.

r = (x, y) = (40, 10) m

Setelah memahami contoh di atas dapat kalian coba soal berikut.

Peluru ditembakkan dengan kecepatan awal 50 m/s dan sudut elevasi 53^0 (sin 53^0 = 0,8). Tentukan:

a. kecepatan peluru pada t = 1s, 2s dan 4s,

b. posisi peluru pada t = 1s, 2s dan 4s!

2. Titik Tertinggi dan Terjauh

a. Titik tertinggi

Jika kalian lihat kembali *Gambar 1.8* maka dapat diketahui bahwa titik tertinggi terjadi di titik B. Apakah sifat-sifat yang perlu kalian ketahui? Kalian tentu bisa melihatnya. Di titik B kecepatannya hanya pada arah horisontal saja sehingga persamaan berikut.

$$v_B = v_x$$
$$v_y = 0 \qquad \text{.....................................} \quad (1.26)$$

Dari nilai v_y dapat ditentukan waktu sampai di titik puncak.

$$v_y = v_0 \sin \alpha - g\, t_m = 0$$
$$t_m = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

Substitusikan nilai t_m di atas pada persamaan ketinggian yaitu dari persamaan 1.25. Sehingga diperoleh:

$$y = v_0 \sin \alpha\, t - \tfrac{1}{2}\, g\, t^2$$
$$y_m = v_0 \sin \alpha \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right) - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2$$
$$= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Jadi tinggi maksimum yang dicapai pada gerak parabola memenuhi persamaan berikut.

$$y_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \qquad \text{.....................................} \quad (1.27)$$

dengan : y_m = tinggi maksimum (m)
v_0 = kecepatan awal (m/s)
α = sudut elevasi
g = percepatan gravitasi (m/s^2)

b. Titik terjauh

Pada *Gambar 1.8*, titik terjauh terjadi pada titik C. Pada titik tersebut y = 0 berarti dapat diperoleh waktunya sebagai berikut.

$$y = v_0 \sin \alpha\, t - \tfrac{1}{2}\, g\, t^2 = 0$$
$$(v_0 \sin \alpha\, t - \tfrac{1}{2}\, g\, t)\, t = 0$$

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

Jangkauan terjauh yang dicapai benda sebesar R. Nilai R dapat ditentukan dengan substitusi t pada persamaan 1.24.

$$x = v_x\ t$$

$$x = v_0 \cos\alpha \ . \ \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$x = \frac{v_0^{\ 2} \sin 2\alpha}{g} \qquad \text{.........................} \ (1.28)$$

CONTOH 1.9

Sebutir peluru ditembakkan dari senapan dengan kecepatan awal 100 m/s. Sudut elevasi saat itu sebesar 15^0 ($\sin 15^0 = 0{,}26$). Hitunglah tinggi maksimum dan jangkauan terjauh yang dapat dicapai peluru!

Penyelesaian

$v_0 = 100$ m/s

$\alpha = 15^0 \rightarrow \sin 15^0 = 0{,}26$

g = 10 m/s

Tinggi maksimum yang dicapai peluru sebesar:

$$y_m = \frac{v_0^{\ 2} \sin^2\alpha}{2g}$$

$$= \frac{(100)^2 (0{,}26)^2}{2.10} = 33{,}8 \text{ m}$$

Jangkauan terjauhnya memenuhi:

$$R = \frac{v_0^{\ 2} \sin 2\alpha}{g}$$

$$= \frac{(100)^2 . \sin(2.15^0)}{10} = \frac{10^4 . \frac{1}{2}}{10} = 500 \text{ m}$$

Setelah memahami contoh di atas dapat kalian coba soal berikut.

Dhania melempar batu dengan kecepatan 20 m/s dan sudut elevasi 30^0. Percepatan gravitasinya g = 10 m/s^2. Tentukan:

a. waktu saat mencapai di tanah kembali,

b. tinggi maksimumnya,

c. jangkauan terjauh!

Penting

Rumus trigonometri sudut rangkap memenuhi:

$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

ATIHAN 1.3

1. Benda yang dilemparkan dengan kecepatan 20 m/s memiliki sudut elevasi 30^O. Tentukan kecepatan dan posisi benda pada t = 1s!
2. Faza melemparkan batu pada arah 60^O terhadap horisontal. Kecepatannya 30 m/s. Tentukan:
   a. kecepatan batu di titik tertinggi,
   b. waktu yang dibutuhkan hingga mencapai titik tertinggi!
3. Peluru ditembakkan dari sebuah senapan yang mampu memberikan kecepatan awal $50\sqrt{2}$ m/s. Peluru diarahkan dengan sudut 45^O terhadap horisontal. Percepatan gravitasi g = 10 m/s^2. Berapakah:
   a. waktu yang dibutuhkan peluru di udara,
   b. ketinggian maksimumnya,
   c. jangkauan terjauhnya?
4. Sebuah peluru yang memiliki kecepatan awal v_0 dan sudut elevasi α. Jangkauan terjauhnya adalah 40 m. Jika tinggi maksimum yang dicapai 30 m maka tentukan nilai α!
5. Sebutir peluru ditembakkan dari sebuah senapan yang dapat memberikan kecepatan awal 40 m/s dari puncak menara setinggi 140 m dengan arah membentuk sudut 30^o terhadap garis mendatar. Tentukan jarak terjauh peluru tersebut saat tiba di tanah dihitung dari dasar menara!

Rangkuman Bab 1

1. Pada gerak translasi, posisi partikel tiap saat dapat dinyatakan sebagai vektor.

   $r = x\text{i} + y\text{j}$

   Dan perpindahannya memenuhi:

   $\Delta r = r_2 - r_1$
2. Kecepatan benda yang bergerak.
   a. Nilai rata-ratanya : $\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$
   b. Nilai sesaatnya : $v = \frac{dr}{dt}$
   c. Kebalikannya : $r = r_0 + \int v\, dt$
3. Percepatan benda.
   a. Nilai rata-rata : $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$
   b. Nilai sesaat : $a = \frac{dv}{dt}$
   c. Kebalikannya : $v = v_0 + \int a\, dt$
4. Pada benda yang bergerak melingkar akan berlaku:
   a. Kecepatan sudut sesaatnya:

   $$\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \theta = \theta_0 + \int \omega\, dt$$

b. Percepatan sudut sesaatnya:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \omega = \omega_0 + \int a\,dt$$

c. Hubungan besaran-besaran:

$$S = \theta R$$
$$v = \omega R$$
$$a_\theta = \alpha R$$

d. Percepatan linier benda yang bergerak melingkar ada dua kemungkinan.

$$a_\theta = \alpha R$$

$$a_R = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$

$$a_{tot} = \sqrt{a_R^{\ 2} + a_\theta^{\ 2}}$$

5. Gerak parabola adalah perpaduan dua gerak:

a. Pada arah horisontal : GLB

$$v_x = v_0 \cos \alpha$$
$$x = v_x t$$

b. Pada arah vertikal : GLBB

$$v_y = v_0 \sin \alpha - g t$$
$$y = v_0 \sin \alpha\, t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

6. Pada titik tertinggi gerak parabola berlaku:

$$v_y = 0$$

$$t_m = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$y_m = \frac{v_0^{\ 2} \sin^2 \alpha}{2g}$$

7. Pada titik terjauh gerak partikel adalah:

$$y = 0$$

$$t = 2\, t_m = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$R = \frac{v_0^{\ 2} \sin 2\alpha}{g}$$

Evaluasi Bab

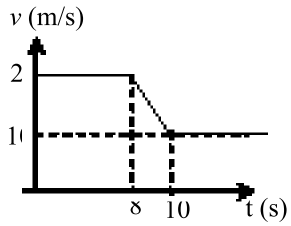
Pilihlah jawaban yang benar pada soal – soal berikut dan kerjakan di buku tugas kalian.

1. Posisi gerak partikel berubah tiap saat sesuai persamaan : $\vec{r} = (10 - 1{,}5\,t^2)\,\vec{i} + (t + 1{,}5\,t^2)\,\vec{j}$. Semua satuan dalam SI. Kecepatan rata-rata partikel pada 2 s pertama adalah ....
   A. 6 m/s
   B. 8 m/s
   C. 10 m/s
   D. 14 m/s
   E. 16 m/s

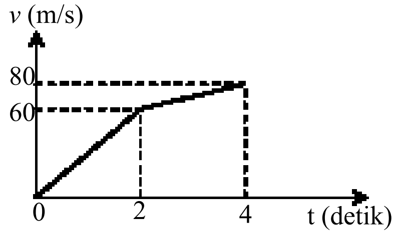
2. Gerak titik materi dalam suatu bidang datar dinyatakan oleh persamaan : $\vec{r} = (t^2 + 3t - 1)\,\vec{i} + (2t^2 + 3)\,\vec{j}$. (*r* dalam meter dan t dalam sekon). Pada saat t = 3 sekon, gerak tersebut memiliki kelajuan sebesar ....
   A. 5 ms^{-1}
   B. 10 ms^{-1}
   C. 13 ms^{-1}
   D. 15 ms^{-1}
   E. 21 ms^{-1}

3. Sebuah benda bergerak dengan persamaan kecepatan $v = (4t + 10)$ m/s dengan t dalam sekon. Bila pada saat t = 0 benda berada pada $x = 25$ m, tentukanlah posisi benda pada saat t = 5 sekon!
   A. 10 m
   B. 30 m
   C. 55 m
   D. 100 m
   E. 125 m

4. Sebuah benda bergerak mempunyai kecepatan yang berubah terhadap waktu seperti pada gambar. Jika pada saat t = 2 s posisi benda pada $x = -90$ m, maka setelah 11 sekon benda berada pada $x =$ ….
   A. 50 m
   B. 70 m
   C. 110 m
   D. 160 m
   E. 200 m



5. Berdasarkan grafik di bawah ini, maka jarak yang ditempuh benda untuk t = 4 detik adalah ....

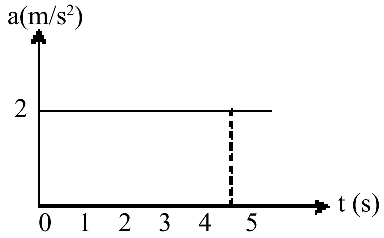


   A. 20 m
   B. 60 m
   C. 80 m
   D. 140 m
   E. 200 m

6. Sebuah benda bergerak dengan persamaan perpindahan : $\vec{S} = (6t^2 + 6t)\,\vec{i} + (8t^2)\,\vec{j}$. S dalam meter dan t dalam sekon. Nilai percepatan pada t = 2 s adalah ….
   A. 6 m/s^2
   B. 8 m/s^2
   C. 10 m/s^2
   D. 20 m/s^2
   E. 28 m/s^2

7. Sebuah partikel mula-mula bergerak lurus dengan kecepatan 100 m/s. Karena pengaruh gaya, partikel tersebut mengalami percepatan. Percepatannya berubah tiap saat sesuai persamaan: $a = (4 - 10t)\,m/s^2$. t adalah waktu lamanya gaya bekerja. Kecepatan partikel setelah gaya bekerja selama 4 sekon adalah ....
   A. 24 m/s
   B. 28 m/s
   C. 32 m/s
   D. 36 m/s
   E. 40 m/s

8. Sebuah benda bergerak dengan percepatan seperti pada grafik di bawah.



Jika mula – mula benda bergerak dengan kecepatan 10 m/s, maka setelah 4 detik benda memiliki kecepatan ....

A. 2 m/s
B. 8 m/s
C. 10 m/s
D. 14 m/s
E. 18 m/s

9. Sebuah partikel berotasi dengan persamaan posisi sudut $\theta = 4t^2 - 2t$ rad. Kecepatan sudut partikel tersebut saat t = 2 s adalah ....

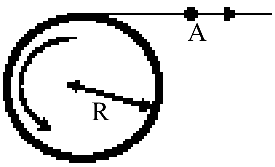
A. 6 rad/s
B. 8 rad/s
C. 10 rad/s
D. 12 rad/s
E. 14 rad/s

10. Benda yang bergerak melingkar dengan jari-jari tertentu posisi sudutnya berubah menurut persamaan : $\theta = t^3 - r^2 + 5$, θ dalam radian dan t dalam sekon. Percepatan sudut partikel tersebut saat t = 2 s adalah....

A. 2 rad/s
B. 4 rad/s
C. 8 rad/s
D. 10 rad/s
E. 15 rad/s

11. Tali melilit pada roda berjari – jari R = 25 cm, seperti gambar. Jika suatu titik pada tali itu (titik A) mempunyai kecepatan 5 m/s, maka kecepatan rotasi roda adalah ....

A. 0,2rad/s
B. 5 rad/s
C. 5π rad/s
D. 20 rad/s
E. 20π rad/s



12. Diantara pernyataan berikut:
(1) arahnya menyinggung lintasan sebagai akibat dari perubahan besar kecepatan,
(2) percepatan yang selalu menuju pusat lintasan dan terjadi dari perubahan laju gerak melingkar,
(3) percepatan yang arahnya tegak lurus pada jari – jari lintasan,
(4) percepatan yang mengakibatkan gerak rotasi dengan kecepatan tetap.

Pernyataan di atas yang sesuai dengan spesifikasi percepatan tangensial pada gerak rotasi adalah ....

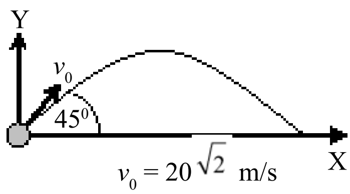
A. 1 dan 2
B. 2 dan 4
C. 1 dan 3
D. 1, 2 dan 3
E. 4 saja

13. Sebuah titik P pada benda tegar yang sedang berotasi terletak 1 meter dari sumbu putar benda. Pada saat kecepatan sudutnya $2\sqrt{2}$ rad s^{-1} dan percepatan sudutnya 6 rad s^{-2}, percepatan total titik P adalah ….

A. 6m/s^2
B. 10 m/s^2
C. 14 m/s^2
D. 12 m/s^2
E. 100 m/s^2

14. Sebuah benda di lempar miring ke atas sehingga lintasannya parabola seperti pada gambar di samping. g = 10 m/s^2. Pada saat jarak tempuh mendatarnya (x) = 20 m , maka ketinggiannya (y) ....

A. 5 m
B. 10 m
C. 15 m
D. 20 m
E. 25 m

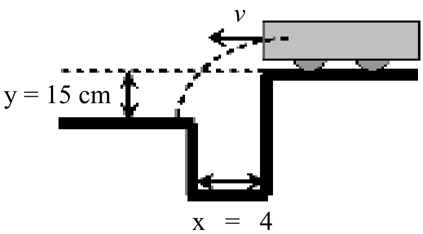


15. Sebuah batu dilemparkan dengan sudut lempar tertentu. Batu mencapai titik tertinggi 80 m di atas tanah. Bila g = 10 m/s^2, waktu yang diperlukan batu selama di udara adalah....
    A. 4 s
    B. 5 s
    C. 6 s
    D. 8 s
    E. 12 s

16. Sebuah peluru yang ditembakkan dengan evaluasi tertentu mempunyai persamaan vektor posisi r = 20t *i* +(20t – 5 t^2) ***j*****,** dengan t dalam sekon dan r dalam meter. Tinggi maksimum yang dapat dicapai oleh peluru adalah ….
    A. 60 m
    B. 80 m
    C. 80 m
    D. 120 m
    E. 60 m

17. Sebuah batu dilemparkan dengan sudut elevasi 37^O (sin 37^O = 0,6), mencapai tinggi maksimum dalam selang waktu 3 sekon. Jika percepatan gravitasi = 10 m/s^2, jarak mendatar yang dicapai batu dalam selang waktu tersebut sama dengan ....
    A. 45 m
    B. 54 m
    C. 60 m
    D. 120 m
    E. 180 m

18. Sebuah mobil hendak menyeberangi sebuah parit yang lebarnya 4,0 meter. Perbedaan tinggi antara kedua sisi parit itu adalah 15 cm, seperti yang ditunjukkan oleh gambar di atas ini. Jika percepatan gravitasi g = 10 m/s^2, maka besarnya kelajuan minimum yang diperlukan oleh mobil tersebut agar penyeberangan mobil itu tepat dapat berlangsung adalah ….



    A. 10 m/s
    B. 15 m/s
    C. 17 m/s
    D. 20 m/s
    E. 23 m/s

19. Sebuah peluru ditembakkan dengan sudut elevasi 15^O terhadap horizontal dan tiba ditanah dengan kecepatan 50 m/s. Jarak tembak peluru tersebut adalah... (g = 10 m/s^2)
    A. 50 m
    B. 75 m
    C. 100 m
    D. 125 m
    E. 150 m

20. Sebuah peluru ditembakkan dari senapan yang mampu memberikan kecepatan awal 40 m/s. Sudut elevasi sebesar 30^O. Ketinggian maksimum yang dicapai peluru tersebut adalah ....
    A. 15 m
    B. 20 m
    C. 25 m
    D. 30 m
    E. 100 m